

M1			M2			M3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3

Primer examen final de Probabilidad I

2026-1 FES Acatlán

Martes 2 de diciembre

Nombre: _____

Instrucciones. Si está resolviendo una reposición indique en el borde superior derecho de esta página el módulo al que corresponde (tache todas las preguntas que no resolvió). Si está resolviendo examen final seleccione exactamente 4 preguntas en total. Al menos una de cada módulo y no más de 2 de ningún módulo individual. También en caso de final indique en la parte superior derecha de esta página qué preguntas está resolviendo de cada módulo.

Módulo 1

- Indica si las siguientes afirmaciones son **verdaderas o falsas**. Justifica brevemente tu respuesta usando propiedades de probabilidad, diagramas o contraejemplos. Supóngase que $A, B, D \in \mathcal{F}$.

(a)

$$\mathbb{P}((A \cup B) \setminus D) = \mathbb{P}(A \setminus D) + \mathbb{P}(B \setminus D) - \mathbb{P}(A \cap B \cap D^c).$$

(b) Si $A \subseteq B$, entonces

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$

(c) Si A y B son independientes, entonces A^c y B también son independientes.

- Una empresa utiliza un algoritmo para detectar transacciones fraudulentas en tarjetas bancarias.

- El 2.5 % de todas las transacciones son realmente fraudulentas.
- El algoritmo detecta un fraude correctamente el 92 % de las veces.
- El algoritmo marca como fraude el 4 % de las transacciones legítimas.

a) Calcula la probabilidad de que el algoritmo marque una transacción como fraude.

b) Calcula la probabilidad de que una transacción marcada como fraude realmente **no sea** fraudulenta.

- En una caja hay 8 tarjetas: 4 marcadas con X, 3 marcadas con Y y 1 marcada con Z. Se extraen dos tarjetas sin reemplazo.

a) Calcula la probabilidad de que la primera tarjeta extraída sea una tarjeta con Y.

b) Si la primera tarjeta fue una X, calcula la probabilidad de que la segunda sea una Y.

c) ¿Es independiente el evento “la segunda tarjeta es Y” del evento “la primera tarjeta es X”? Justifica tu respuesta.

Módulo 2

- Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro $\lambda > 0$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(a) Calcula la esperanza $\mathbb{E}[X]$.

(b) Calcula la varianza $\text{Var}(X)$.

- Considera la función $F(x)$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{x+1}{4}, & -1 \leq x < 1, \\ \frac{3}{4} + \frac{x-1}{3}, & 1 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

(a) Verifica que $F(x)$ es una **función de distribución**.

(b) Calcula $P(X \leq 1)$ y $P(0 < X < 3)$.

3. El tiempo (en minutos) que tarda un dron en completar una entrega sigue una distribución normal con media $\mu = 18$ y desviación estándar $\sigma = 4$.

- Calcula la probabilidad de que una entrega tarde **a lo más 22 minutos**.
- Encuentra el valor t_0 tal que el 90 % de las entregas se completa en **menos de** t_0 .

Módulo 3

1. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \beta (1+x)^{-(\beta+1)}, & x \geq 1, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

donde $\beta > 0$. Defina la transformación

$$Y = \frac{2}{1+X}.$$

- Determine el soporte de la variable aleatoria transformada Y .
 - Encuentre la función de densidad de Y .
2. En una aplicación de *food delivery*, el tiempo que tarda un repartidor en completar una entrega se modela como una variable aleatoria T con media $\mu = 22$ minutos y varianza $\sigma^2 = 36$. Para monitorear el desempeño, se toma una muestra de $n = 40$ tiempos de entrega independientes e idénticamente distribuidos, denotados por $T_1, \dots, T_{40}$. Se calcula el tiempo promedio de entrega:

$$\bar{T}_{40} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} T_i.$$

Usando el Teorema Central del Límite, estima la probabilidad de que el promedio de tiempos de entrega sea menor a 20.

3. Sea la distribución conjunta de las variables aleatorias X y Y dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{1, 2\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Obtén las funciones marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.
- Diga si X y Y son independientes.
- Calcula $\mathbb{E}(X+Y)$ usando las marginales y confirma que

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990